第 4 节 高考中双曲线常用的二级结论（★★☆）

强化训练

1．（★）设 F_1，F_2 是双曲线 $C:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 的左、右焦点，P 为 C 上一点，若 $\angle F_1PF_2=60^{\circ}$，则 ΔPF_1F_2 的面积为_____.

答案：$5\sqrt{3}$

解析：给出 $\angle F_1PF_2$，可用 $S=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$ 求焦点三角形面积，由题意，$S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{5}{\tan 30^{\circ}}=5\sqrt{3}$.

2．（2023・江西模拟・★★）已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，其渐近线方程为 $y=\pm 2x$，P 是 C 上一点，且 $PF_1\perp PF_2$，若 ΔPF_1F_2 的面积为 4，则 C 的焦距为（　　）

（A）$\sqrt{3}$　　（B）$2\sqrt{3}$　　（C）$2\sqrt{5}$　　（D）$4\sqrt{5}$

答案：C

解析：渐近线方程为 $y=\pm 2x\Rightarrow\frac{b}{a}=2\Rightarrow b=2a$ ①，

条件中还有 ΔPF_1F_2 的面积，可代公式 $S=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$ 算，由于 θ 已知，故可求得 b，

因为 $PF_1\perp PF_2$，所以 $\theta=\angle F_1PF_2=90^{\circ}$，由焦点三角形面积公式，$S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}=\frac{b^2}{\tan 45^{\circ}}=b^2$，

又由题意，$S_{\Delta PF_1F_2}=4$，所以 $b^2=4$，故 $b=2$，代入①可得 $a=1$，所以焦距 $2c=2\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{5}$.

3．（2023・陕西安康模拟・★★★）双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，C 上一点 P 到 x 轴的距离为 $2a$，$\angle F_1PF_2=120^{\circ}$，则双曲线 C 的离心率为_____.

答案：$\sqrt{3}+2$

解析：已知点 P 到 x 轴的距离和 $\angle F_1PF_2$，可通过两种方式算 ΔPF_1F_2 的面积来建立方程求离心率，

因为点 P 到 x 轴的距离为 $2a$，所以 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot 2a=2ac$，

又 $\angle F_1PF_2=120^{\circ}$，所以 $S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{b^2}{\tan 60^{\circ}}=\frac{b^2}{\sqrt{3}}$，从而 $2ac=\frac{b^2}{\sqrt{3}}$，故 $2\sqrt{3}ac=b^2=c^2-a^2$，

两端同除以 a^2 可得 $2\sqrt{3}e=e^2-1$，解得：$e=\sqrt{3}\pm 2$，又 $e>1$，所以 $e=\sqrt{3}+2$.

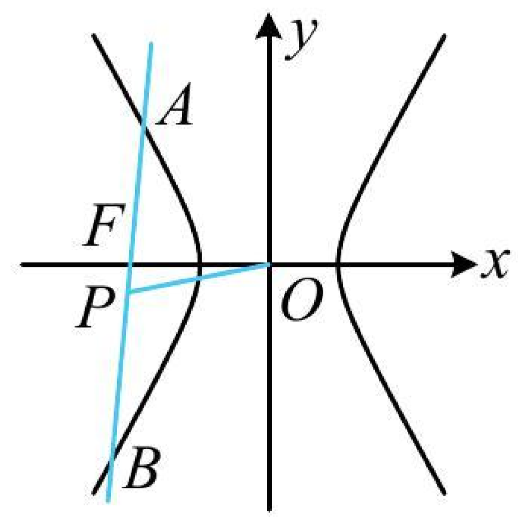
4．（2022・陕西汉中模拟・★★）已知双曲线 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 作斜率为 2 的直线与双曲线交于 A，B 两点，P 是 AB 中点，O 为原点，若直线 OP 的斜率为 $\frac{1}{4}$，则双曲线的离心率为（　　）

（A）$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　（B）2　（C）$\dfrac{3}{2}$　（D）$\sqrt{2}$

答案：A

解析：涉及弦中点，考虑用中点弦斜率积结论，

如图，$k_{AB}\cdot k_{OP}=\dfrac{b^2}{4}$，所以 $2\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{b^2}{4}$，解得：$b^2=2$，故离心率 $e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{4+b^2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.



5.（2023・安徽模拟・★★）已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与直线 $y=-x+2$ 相交于 A，B 两点，弦 AB 的中点 M 的横坐标为 -1，则双曲线 C 的渐近线方程为（　　）

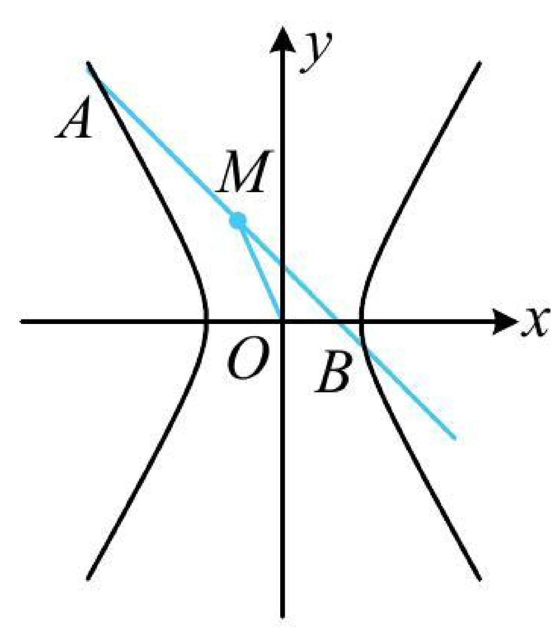
（A）$y=\pm\sqrt{3}x$　（B）$y=\pm 3x$　（C）$y=\pm\dfrac{1}{3}x$　（D）$y=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$

答案：A

解析：涉及弦中点，考虑用中点弦斜率积结论，直线 AB 的斜率已知，求 OM 的斜率还差纵坐标，可将 M 的横坐标代入直线 AB 的方程来求，

如图，M 的横坐标为 $-1\Rightarrow$ 其纵坐标 $y_M=-(-1)+2=3$，

由中点弦斜率积结论，$k_{AB}\cdot k_{OM}=-1\times(-3)=\dfrac{b^2}{a^2}$，所以 $\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$，故双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{3}x$.



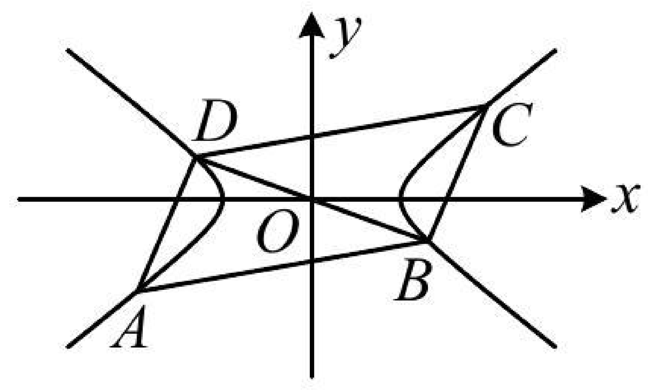
6.（2023・安徽亳州模拟・★★）已知平行四边形 $ABCD$ 的四个顶点均在双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上，且直线 AB，AD 的斜率之积为 $\dfrac{1}{9}$，则该双曲线的渐近线方程是_____.

答案：$y=\pm\dfrac{1}{3}x$

解析：如图，观察发现 B，D 应关于原点对称，故可用第三定义斜率积结论（推广）来处理，

由图可知，$k_{AB}\cdot k_{AD}=\dfrac{b^2}{a^2}=\dfrac{1}{9}$，所以 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{3}$，

故双曲线的渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{3}x$.



7.（2022 • 湖南长沙模拟 • ★★★）已知 $m+n=4$，点 $M(m,n)$ 是双曲线 $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$ 的一条弦 AB 的中点，则当 mn 取得最大值时，直线 AB 的方程为_____.

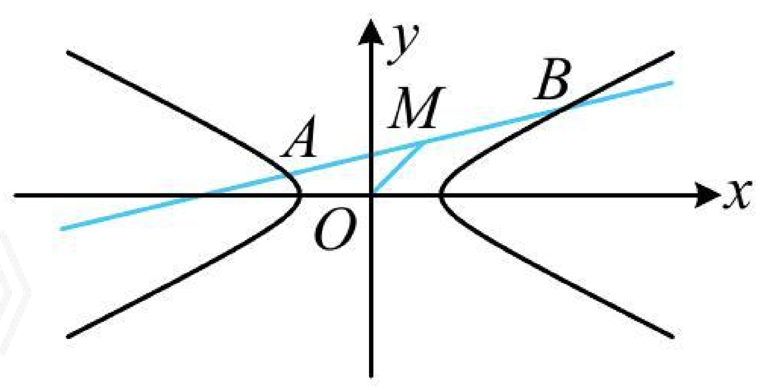
答案： $x-4y+6=0$

解析： 先分析 mn 取得最大值时 m 和 n 的值，得到 M 的坐标，

由题意，$mn\le(\frac{m+n}{2})^2=4$，当且仅当 $m=n=2$ 时取等号，所以当 mn 最大时，M 的坐标为 $(2,2)$，

涉及 M 为弦 AB 中点，考虑中点弦斜率积结论，如图，$k_{OM}=1$，所以 $k_{AB}\cdot k_{OM}=k_{AB}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，

故直线 AB 的方程为 $y-2=\frac{1}{4}(x-2)$，整理得：$x-4y+6=0$.



8.（★★★）已知 A，B 为双曲线 E 的左、右顶点，点 M 在 E 上，ΔABM 为等腰三角形，且顶角为 120°，则 E 的离心率为（　　）

（A）$\sqrt{5}$　（B）2　（C）$\sqrt{3}$　（D）$\sqrt{2}$

答案： D

解法 1： 如图，可通过分析几何特征，求得 M 的坐标，代入双曲线方程求离心率，

设双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，不妨设 M 在第一象限，过 M 作 $MN\perp x$ 轴于 N，

由题意，$\angle ABM=120^\circ$，$|AB|=|BM|=2a$，所以 $\angle MBN=180^\circ-\angle ABM=60^\circ$，

$|BN|=|BM|\cdot\cos\angle MBN=2a\cos60^\circ=a$，$|ON|=|OB|+|BN|=2a$，$|MN|=|BM|\cdot\sin\angle MBN=2a\sin60^\circ=\sqrt{3}a$，

故 $M(2a,\sqrt{3}a)$，代入 E 的方程得：$\frac{(2a)^2}{a^2}-\frac{(\sqrt{3}a)^2}{b^2}=1$，

所以 $a^2=b^2=c^2-a^2$，从而 $\frac{c^2}{a^2}=2$，故 E 的离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$.

解法 2： 注意到 A，B 为两个顶点，M 在 E 上，故可用第三定义斜率积结论建立 a，b，c 的关系，

设双曲线 $E:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$，由题意，$\angle ABM=120^\circ$，$\angle BAM=\angle BMA=30^\circ$，

$\angle MBx = 180^{\circ} - \angle ABM = 60^{\circ}$，所以 $k_{MA} = \tan\angle BAM = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$， $k_{MB} = \tan\angle MBx = \sqrt{3}$，

由第三定义斜率积结论， $k_{MA} \cdot k_{MB} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \times \sqrt{3} = \dfrac{b^2}{a^2}$，所以 $a^2 = b^2 = c^2 - a^2$，从而 $\dfrac{c^2}{a^2} = 2$，故 $e = \dfrac{c}{a} = \sqrt{2}$.